EXAMEN D'ANALYSE III

Session Normale

Durée : 1h30

Exercice 1 **(9 points)**

1. Soit $x \geq 0$. Montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 1$, on a

$$\ln^{(k)}(x+1) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(x+1)^k}$$

2. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n de la fonction $y \mapsto \ln(1+y)$ sur l'intervalle $[0, x]$.
3. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$\left|\ln(x+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \forall n \geq 1$$

4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
5. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.
6. En déduire que, pour tous réels strictement positifs $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ ($n \geq 2$), on a

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Exercice 2 **(5 points)**

1. Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$.
2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(0, f(0))$.
3. Préciser la position de cette tangente par rapport à la courbe de f.

Exercice 3 **(6 points)**

1. Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $t \mapsto \ln(1+t+t^2)$.
2. En déduire le développement asymptotique d'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$.
3. Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x}$.
4. Montrer que la fonction $g : x \mapsto x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ et préciser son équation.

BONNE CHANCE